UNIVERSITE PAUL SABATIER
L1 PCP

Année Universitaire 2008 -2009
23 février 2009

Contrôle continu de mécanique

L'usage des calculatrices est interdit.
(durée: 45 minutes)

NOM :	Prénom :	Groupe :	*Note (/20) :*

Exercice :

Soit un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$, considéré comme galiléen. Oz est la verticale ascendante, et on associe à $\mathcal{R}$, la base cartésienne $\mathcal{B}=\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$.

Un manège est constitué par un disque $(\mathcal{D})$ de rayon R et de centre O, qui tourne uniformément autour de la verticale Oz à la vitesse angulaire ω constante. On note $\mathcal{R}'\left(O,\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_z}\right)$ le référentiel lié au manège et $\mathcal{B}'=\left(\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_z}\right)$ la base qui lui est associée.

A l'instant initial $t=0$, un enfant, repéré par le point M, a pour coordonnées cartésiennes $(-R,0,0)_{\mathcal{B}'}$ $= (-R,0,0)_{\mathcal{B}}$. Il se déplace alors suivant un diamètre du manège à vitesse constante v_o par rapport au manège.

1- On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au manège.

a) Donner l'expression de la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}'$: $\vec{v}(M/\mathcal{R}')$.

$$\vec{v}(M/R') = \left[\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{R'} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{R'} = \left[\frac{d}{dt}(x\,\vec{e}_{x'})\right]_{R'} = \dot{x}\,\vec{e}_{x'} = v_0\vec{e}_{x'}$$

b) En déduire les équations paramétriques de la trajectoire de l'enfant dans $\mathcal{R}'$.

$$\vec{v}(M/R') = \begin{vmatrix}\dot{x}'\\ \dot{y}'\\ \dot{z}'\end{vmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{vmatrix}v_0\\0\\0\end{vmatrix}_{\mathcal{B}'} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}'(t)=v_0\\ \dot{y}'(t)=0\\ \dot{z}'(t)=0\end{cases} \underset{\text{C.I.}}{\Rightarrow} \begin{cases}x'(t)=v_0t-R\\ y'(t)=0\\ z'(t)=0\end{cases}$$

c) Quelle est la courbe décrite par l'enfant dans $\mathcal{R}'$?

$\left.\begin{matrix}y'(t)=0\\ z'(t)=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ dans R', M décrit 1 droite (diamètre du manège)

2- Donner l'expression du vecteur rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$: $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$.

$$\vec{\Omega}(R'/R) = \omega\,\vec{e}_z = \omega\,\vec{e}_{z'}$$

3- On étudie maintenant la trajectoire dans le référentiel $\mathcal{R}$.

a) Rappeler la loi de composition des vitesses (on précisera tous les termes introduits).

$$\underbrace{\vec{v}(M/R)}_{\text{vitesse de M dans R}} = \vec{v}(M/R') + \underbrace{\left[\underbrace{\vec{v}(O'\in R'/R)}_{\text{vitesse de l'origine de } R' \text{ ds } R.} + \vec{\Omega}(R'/R)\times\overrightarrow{O'M}\right]}_{\vec{v}_e(M,R'/R) \text{ = vitesse d'entraînement}}$$

b) Par application de la loi énoncée en 3-a), déterminer l'expression de la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$: $\vec{v}(M/\mathcal{R})$. On l'explicitera dans la base $\mathcal{B}'$.

$O' \equiv O$ fixe dans R $\Rightarrow \vec{v}(O'\in R'/R) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}_e(M,R'/R) = \omega\,\vec{e}_z \times x'\,\vec{e}_{x'} = \omega x'\,\vec{e}_{y'}$

Alors $\vec{v}(M/R) = v_0\,\vec{e}_{x'} + \omega x'\,\vec{e}_{y'}$

c) En déduire les équations paramétriques de la trajectoire suivie par l'enfant dans $\mathcal{R}$.

$\dot{x}(t) = v_0\cos\omega t - \omega(v_0t-R)\sin\omega t \Rightarrow x(t) = \cancel{\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t} + \omega R\left(\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right) - \omega v_0\left[\frac{-t\cos\omega t}{\omega} + \cancel{\frac{\sin\omega t}{\omega^2}}\right]$

(S par partie : $\int uv' = uv - \int u'v$). $\Rightarrow x(t) = -(R-v_0t)\cos\omega t$

$\dot{y}(t) = v_0\sin\omega t + \omega(v_0t-R)\cos\omega t \Rightarrow y(t) = \cancel{-\frac{v_0}{\omega}\cos\omega t} - \omega R\frac{\sin\omega t}{\omega} + \omega v_0\left[\frac{t\sin\omega t}{\omega} - \cancel{\left(\frac{-\cos\omega t}{\omega^2}\right)}\right]$

$\Rightarrow y(t) = -(R-v_0t)\sin\omega t$.

d) Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire dans $\mathcal{R}$ s'exprime sous la forme $Y^2 = X^2$, dans laquelle on exprimera Y et X en fonction de y, x et des données du problème.

$x^2+y^2 = (R-v_0t)^2 \Rightarrow t = \dfrac{R-\sqrt{x^2+y^2}}{v_0}$ et $\tan\omega t = \dfrac{y}{x}$.

Alors $y = -\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\left(\dfrac{\omega}{v_0}\left[R-\sqrt{x^2+y^2}\right]\right)$

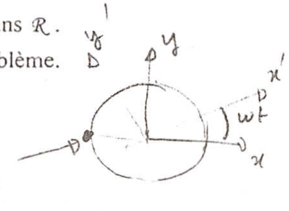
$\Rightarrow y^2 = (x^2+y^2)\sin^2\left(\dfrac{\omega}{v_0}\left[R-\sqrt{x^2+y^2}\right]\right)$

$$\Rightarrow \underbrace{y^2\cos^2\left[\frac{\omega}{v_0}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]}_{Y^2} = \underbrace{x^2\sin^2\left[\frac{\omega}{v_0}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]}_{X^2}$$

1

e) On introduit maintenant les coordonnées polaires (ρ, φ) liées à M dans $\mathcal{R}$.

i) Exprimer ρ et φ en fonction du temps et des données du problème.



$$\begin{cases} \rho(t) = |OM(t)| = |O'M(t)| = |x'(t)| = R - v_0 t \\ \varphi(t) = \omega t + \underbrace{\pi}_{C.I} \end{cases} \qquad t = 0 \begin{cases} \rho = R \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

ii) En déduire l'équation polaire de la trajectoire.

$$t = \frac{\varphi - \pi}{\omega} \Rightarrow \rho = R - \frac{v_0}{\omega}(\varphi - \pi)$$

f) Par application de la loi de composition des accélérations, déterminer, dans la base $\mathcal{B}'$, l'expression de l'accélération de M par rapport à $\mathcal{R}$: $\vec{a}(M/\mathcal{R})$.

$$\vec{a}(M|R) = \underbrace{\vec{a}(M|R')}_{=\vec{0} \text{ car vitesse cte de } M|R'} + \vec{a}_e(M, R'|R) + \vec{a}_c(M, R'|R)$$

Acc d'entraînement =

$$\vec{a}_e(M, R'|R) = \underbrace{\vec{a}(O' \in R'|R)}_{=\vec{0} \text{ car } O' \equiv O} + \underbrace{\left[\frac{d\vec{\Omega}(R'|R)}{dt}\right]_R}_{=\vec{0} \text{ car } \omega = \text{cte}} \times \vec{O'M} + \vec{\Omega}(R'|R) \times \left[\vec{\Omega}(R'|R) \times \vec{O'M}\right]$$

$$= \omega \vec{e}_z \times (\omega x' \vec{e}_{y'}) = -\omega^2 x' \vec{e}_{x'}$$

Acc. de Coriolis =

$$\vec{a}_c(M, R'|R) = 2\,\vec{\Omega}(R'|R) \times \vec{v}(M|R')$$

$$= 2\omega \vec{e}_z \times v_0 \vec{e}_{x'} = 2\omega v_0 \vec{e}_{y'}$$

Donc $\vec{a}(M|R) = -\omega^2 x' \vec{e}_{x'} + 2\omega v_0 \vec{e}_{y'}$

Questions de cours :

On explicitera toutes les grandeurs introduites dans les réponses.

1- Enoncer la première loi de Newton.

Principe de l'inertie : tt corps reste immobile ou conserve un mvt rectiligne et uniforme, aussi longtemps qu'aucune force extérieure ne vient modifier son état.

2- Enoncer la relation fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen.

$$\sum \vec{F}(M|R') = \sum \vec{F}(M|R) + \underbrace{\vec{F}_{ie}(M, R'/R)}_{-m\vec{a}_e(M, R'/R)} + \underbrace{\vec{F}_{ic}(M, R'/R)}_{-m\vec{a}_c(M, R'/R)} = m\,\vec{a}(M/R')$$

3- Enoncer le théorème du moment cinétique en un point fixe.

$$\left[\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt}\right]_R = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}/R)$$

4- Enoncer la troisième loi de Newton.

Principe de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}$

5- Donner la définition du champ de gravitation et de la pesanteur.

Chp de gravitation : $\vec{\mathcal{G}}_A(M) = -\frac{G M_A}{AM^2} \frac{\vec{AM}}{AM}$ $\begin{cases} G : \text{cte universelle de gravitation.} \\ M_A = \text{Masse de } A \end{cases}$

↳ créé par A en M

Pesanteur : $\vec{P} = m\left[\vec{\mathcal{G}}_T(M) - \vec{a}_e(M, R|R_c)\right]$

$= m\left[\vec{\mathcal{G}}(M) - \Omega^2 \vec{HM}\right]$